Том 29, № 147 2024

НАУЧНАЯ СТАТЬЯ

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-233-243
УДК 519.245

Универсальный метод Монте–Карло для процессов Леви и его экстремумов

Александр Сергеевич ГРЕЧКО[1] **, Олег Евгеньевич КУДРЯВЦЕВ**[1,2]

[1] ООО НПФ «ИнВайз Системс»
344015, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, ул. Еременко, 58/11
[2] ГКОУ ВО «Ростовский филиал Российской таможенной академии»
344002, Российская Федерация, г. Ростов-на-Дону, пр. Буденновский, 20

Аннотация. В статье предложен универсальный подход построения методов Монте–Карло для вычисления цен опционов с выплатами, зависящими от совместного распределения конечного положения процесса Леви X_T и его инфимума $\mathcal{I}_T$ (или супремума $\mathcal{S}_T$). Мы выводим приближенные формулы для условных функций распределения процесса Леви $\mathbf{P}(X_T < x|\mathcal{S}_T = y)$ ($\mathbf{P}(X_T < x|\mathcal{I}_T = y)$), которые выражаются через частную производную по y функции совместного распределения $\mathbf{P}(X_T < x, \mathcal{S}_T < y)$ $(\mathbf{P}(X_T < x, \mathcal{I}_T < y))$ и плотности инфимума (или супремума) в конечный момент времени. Применив преобразование Лапласа к функции совместного распределения процесса Леви и его экстремума, мы используем приближенную факторизацию Винера–Хопфа для представления образа ее частной производной. Обращая преобразование Лапласа с помощью алгоритма Гавера–Стехфеста, мы находим искомую условную функцию распределения. Разработанный алгоритм симуляции совместного положение процесса Леви и его экстремума в заданный момент времени состоит из двух ключевых этапов. На первом этапе мы симулируем значение экстремума процесса Леви на основе аппроксимации его функции распределения $\mathbf{P}(\mathcal{S}_T < x)$ (или $\mathbf{P}(\mathcal{I}_T < x)$). На втором этапе мы симулируем конечное значение процесса Леви на основе аппроксимации условной функции распределения конечного положения процесса Леви относительно его экстремума. Универсальность разработанного нами метода Монте–Карло заключается в реализации единообразного подхода для широкого класса процессов Леви, в отличие от классических подходов, когда симуляции существенным образом опираются на особенности вероятностного распределения, связанного с моделируемым случайным процессом или его экстремумами. В нашем подходе достаточно знать характеристическую экспоненту процесса Леви. Наиболее затратный по времени вычислительный блок по симуляции случайной величины на основе известной функции распределения может быть эффективно реализован с помощью нейросетей и ускорен за счет параллельных вычислений. Таким образом, с одной стороны, предлагаемый нами подход подходит для широкого класса моделей Леви, с другой — допускает комбинирование с методами машинного обучения.

Ключевые слова: процессы Леви, метод Монте–Карло, процессы экстремума, интегральные преобразования, факторизация Винера–Хопфа

Благодарности: Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 23-21-00474, https://rscf.ru/project/23-21-00474/).

Для цитирования: *Гречко А.С., Кудрявцев О.Е.* Универсальный метод Монте–Карло для процессов Леви и его экстремумов // Вестник российских университетов. Математика. 2024. Т. 29. № 147. С. 233–243. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-233-243

SCIENTIFIC ARTICLE

https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-233-243

Universal Monte Carlo method for Lévy processes and their extrema

Alexander S. GRECHKO[1] **, Oleg E. KUDRYAVTSEV**[1,2]
[1] InWise Systems, LLC
58/11 Eremenko St., Rostov-on-Don 344015, Russian Federation
[2] Rostov Branch of the Russian Customs Academy
20 Budennovskiy Av., Rostov-on-Don 344002, Russian Federation

Abstract. The article proposes a universal approach to constructing Monte Carlo methods for pricing options with payoffs depending on the joint distribution of the final position of the Lévy process X_T and its infimum $\mathcal{I}_T$ (or supremum $\mathcal{S}_T$). We derive approximate formulas for the conditional cumulative distribution functions of the Lévy process $\mathbf{P}(X_T < x|\mathcal{S}_T = y)$ ($\mathbf{P}(X_T < x|\mathcal{I}_T = y)$), which are expressed through the partial derivative with respect to y of the joint cumulative distribution function $\mathbf{P}(X_T < x, \mathcal{S}_T < y)$ $(\mathbf{P}(X_T < x, \mathcal{I}_T < y))$ and the density of the infimum (or supremum) at the final moment of time. By applying the Laplace transform to the joint cumulative distribution function of the Lévy process and its extremum, we use the approximate Wiener–Hopf factorization to represent the image of its partial derivative. By inverting the Laplace transform using the Gaver–Stehfest algorithm, we find the desired conditional cumulative distribution function. The developed algorithm for simulating the joint position of the Lévy process and its extremum at a given point in time consists of two key stages. At the first stage, we simulate the extremum value of the Lévy process based on the approximation of its cumulative distribution function $\mathbf{P}(\mathcal{S}_T < x)$ (or $\mathbf{P}(\mathcal{I}_T < x)$). In the second step, we simulate the final value of the Lévy process based on the approximation of the conditional cumulative distribution function of the final position of the Lévy process relative to its extremum. The universality of the Monte Carlo method we developed lies in the implementation of a uniform approach for a wide class of Lévy processes, in contrast to classical approaches, when simulations are essentially based on the features of the probability distribution associated with the simulated random process or its extrema. In our approach, it is enough to know the characteristic exponent of the Lévy process. The most time-consuming computational unit for simulating a random variable based on a known cumulative distribution function can be effectively implemented using neural networks and accelerated through parallel computing. Thus, on the one hand, the approach we propose is suitable for a wide class of Lévy models, on the other hand, it can be combined with machine learning methods.

Keywords: Lévy processes, Monte Carlo method, extremum processes, integral transforms, Wiener–Hopf factorization

Acknowledgements: The research was supported by the Russian Science Foundation (project no. 23-21-00474, https://rscf.ru/en/project/23-21-00474/).

Mathematics Subject Classification: 60G51, 65C05.

For citation: Grechko A.S., Kudryavtsev O.E. Universal Monte Carlo method for Lévy processes and their extrema. *Vestnik rossiyskikh universitetov. Matematika = Russian Universities Reports. Mathematics*, **29**:147 (2024), 233–243. https://doi.org/10.20310/2686-9667-2024-29-147-233-243 (In Russian, Abstr. in Engl.)

Введение

Процессы Леви, допускающие скачки и обобщающие модель Блэка–Шоулза, последние несколько декад активно используются при моделировании финансовых активов (см., например, [1]). Напомним, что процесс Леви имеет независимые однородные по времени приращения и траектории, непрерывные справа с левосторонними пределами (подробнее, см., например, [2]). Простейшим примером процесса Леви является винеровский процесс.

В задачах вычисления цен опционов метод Монте–Карло является наиболее простым с точки зрения практической реализации. Методы симуляции специальных классов процессов Леви на основе особенностей их построения можно найти в [1]. В рамках общего подхода к построению классических методов Монте–Карло моделирование приращений процесса Леви осуществляется на основе обращения соответствующей функции распределения, которую можно вычислить через характеристическую функцию процесса с помощью интеграла Фурье (см., например, [3]). Вместе с тем, в случае опционов, выплаты по которым зависят от траектории базового актива, в моделях со скачками необходимо осуществлять симуляцию положения процесса через достаточно короткие промежутки времени, чтобы фиксировать возможные изменения процессов супремума и инфимума. Этот факт делает стандартные методы Монте–Карло для процессов Леви слишком затратным с вычислительной точки зрения. На основе факторизационного тождества (*факторизация Винера–Хопфа*), связывающего исходный процесс Леви с его супремумом и инфимумом, в [4–6] были построены плотности распределений экстремумов процесса Леви в рандомизированный момент времени, позволяющие разработать более передовые методы Монте–Карло для экзотических опционов. Однако реализация этих методов требовала знания явных формул факторизации, которые известны только для ограниченного числа моделей Леви. Более того, как доказано в [7], в этом случае остается и проблема большого количества шагов по времени. В статье [8] был предложен метод Монте–Карло вычисления вероятности выхода из полосы гауссового процесса, для которого также известна факторизация Винера–Хопфа в явном виде.

В [7] был разработан более универсальный подход к построению методов Монте–Карло для общих моделей Леви, предполагающий непосредственное моделирование процессов экстремума на основе приближенной факторизации Винера–Хопфа. Приближенная факторизация Винера–Хопфа применялась при вычислении цен барьерных опционов в моделях Леви с непрерывным и дискретным мониторингом барьеров (см., например, [9, 10]). Разработанный в [7] метод Монте–Карло с факторизацией Винера–Хопфа для процессов Леви, как показали численные эксперименты в [3], эффективен для симуляции процесса экстремума. Однако для совместного распределения положений экстремума и самого процесса метод нуждается в дальнейшем развитии. В работах [3, 11] предложены подходы по встраиванию искусственных нейросетей в методы Монте–Карло при моделировании случайных величин на основе приближения их функций распределения.

Цель данной статьи — предложить универсальный подход построения методов Монте–Карло для вычисления цен опционов с выплатами, зависящими от совместного распределения конечного положения процесса Леви и его экстремума. В рамках данной работы мы выводим приближенные формулы для условных функций распределения процесса Леви относительно его экстремума, которые выражаются через соответствующую частную производную функции совместного распределения и плотности инфимума (или супремума) в конечный момент времени.

Преобразование Лапласа функции совместного распределения процесса Леви и его экстремума позволяет нам использовать факторизацию Винера–Хопфа для представления образа ее частной производной. Обращая преобразование Лапласа с помощью алгоритма Гавера–Стехфеста, мы находим искомую условную функции распределения. С помощью функций распределения процесса экстремума и условной функции распределения процесса Леви относительно его экстремума мы сначала симулируем положение процесса экстремума, а затем положение самого процесса при известном экстремуме. В результате мы получаем совместное положение процесса Леви и его экстремума в заданный момент времени. Наиболее затратный по времени вычислительный блок по симуляции случайной величины на основе известной функции распределения может быть эффективно реализован с помощью нейросетей. Таким образом, с одной стороны, предлагаемый нами подход подходит для широкого класса моделей Леви, с другой — допускает комбинирование с методами машинного обучения.

Остальная часть статьи организована следующим образом. В разделе 1 мы дадим основные понятия теории процессов Леви, включающие в себя факторизации Винера–Хопфа. Во втором разделе мы выведем приближенные формулы для функций условного распределения процесса Леви относительно его экстремума в фиксированный момент времени. В третьем разделе мы сформулируем алгоритм универсального метода Монте–Карло для общих процессов Леви.

1. Основные понятия теории процессов Леви

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — вероятностное пространство, на котором определен одномерный процесс Леви $\{X_t, t \geq 0\}$. Напомним, что характеристическая экспонента ψ, которая находится из соотношения $E[e^{i\xi X_t}] = e^{-t\psi(\xi)}$, полностью определяет X_t. Согласно хорошо известной формуле Леви–Хинчина (см. [2]), $\psi(\xi)$ допускают следующее представление

$$\psi(\xi) = \frac{\sigma^2}{2}\xi^2 - i\gamma\xi + \int_{\mathbf{R}} (1 - e^{i\xi x} + i\xi x \mathbf{1}_{[-1,1]}(x))\Pi(dx), \tag{1.1}$$

где $\sigma \geq 0$ и $\gamma \in \mathbf{R}$ — константы, а Π — мера на $\mathbf{R} \setminus \{0\}$, удовлетворяющая свойству

$$\int_{\mathbf{R}} \min\{1, x^2\}\Pi(dx) < +\infty.$$

О п р е д е л е н и е 1.1. [2, Definition 45.1] Определим

$$\mathcal{S}_t = \sup_{0\leq s\leq t} X_s \text{ и } \mathcal{I}_t = \inf_{0\leq s\leq t} X_s.$$

Процессы $\{\mathcal{S}_t\}$ и $\{\mathcal{I}_t\}$ называются *процессами супремума* и *инфимума*, соответственно.

Отметим, что для любого $t > 0$ имеют место следующие полезные соотношения [2, Remark 45.9]

$$\mathcal{S}_t \overset{d}{\sim} X_t - \mathcal{I}_t, \quad \mathcal{I}_t \overset{d}{\sim} X_t - \mathcal{S}_t.$$

Введем случайное время T_q, имеющее показательное распределение с параметром интенсивности $q > 0$, и рассмотрим характеристическую функцию распределения X_{T_q}

$$E\left[e^{i\xi X_{T_q}}\right] = q(q + \psi(\xi))^{-1}.$$

Имеет место следующий результат (факторизация Винера–Хопфа).

Теорема 1.1. (см. [2, Theorem 45.2]) *Существует единственная пара характеристических функций $\phi_q^+(\xi)$ и $\phi_q^-(\xi)$ бесконечно делимых распределений с носителями на $[0,+\infty)$ и $(-\infty,0]$, соответственно, таких, что выполняется тождество*

$$q(q+\psi(\xi))^{-1} = \phi_q^+(\xi)\phi_q^-(\xi), \quad \xi \in \mathbf{R}.$$

Согласно [2, Theorem 45.7], функции $\phi_q^+(\xi)$ и $\phi_q^-(\xi)$ — это характеристические функции распределений $\mathcal{S}_{T_q}$ и $\mathcal{I}_{T_q}$, соответственно:

$$\phi_q^+(\xi) = E\left[\int_0^\infty qe^{-qt}e^{i\xi\mathcal{S}_t}dt\right] = E\left[e^{i\xi\mathcal{S}_{T_q}}\right], \tag{1.2}$$

$$\phi_q^-(\xi) = E\left[\int_0^\infty qe^{-qt}e^{i\xi\mathcal{I}_t}dt\right] = E\left[e^{i\xi\mathcal{I}_{T_q}}\right]. \tag{1.3}$$

2. Факторизация Винера–Хопфа и условные функции распределения процесса Леви относительно его экстремума

Рассмотрим задачу аппроксимации функций совместного распределения процесса Леви и процесса экстремума. Обозначим через:

$F^+(x,T) = \mathbf{P}(\mathcal{S}_T < x)$ функцию распределения положения процесса супремума $\mathcal{S}_T$;

$F^-(x,T) = \mathbf{P}(\mathcal{I}_T < x)$ функцию распределения положения процесса инфимума $\mathcal{I}_T$;

$F_X^+(x,y,T) = \mathbf{P}(X_T < x, \mathcal{S}_T < y)$ функцию совместного распределения величин X_T и $\mathcal{S}_T$;

$F_X^-(x,y,T) = \mathbf{P}(X_T < x, \mathcal{I}_T < y)$ функцию совместного распределения величин X_T и $\mathcal{I}_T$;

$F_{X|\mathcal{S}}(x,y,T) = \mathbf{P}(X_T < x|\mathcal{S}_T = y)$ условную функцию распределения величины X_T относительно $\mathcal{S}_T$;

$F_{X|\mathcal{I}}(x,y,T) = \mathbf{P}(X_T < x|\mathcal{I}_T = y)$ условную функцию распределения величины X_T относительно $\mathcal{I}_T$.

Применяя преобразование Лапласа $\mathcal{L}$ к $F^+(x,T)$ по времени T, получаем

$$\begin{aligned}\hat{F}^+(x,q) &= \int_0^{+\infty} e^{-qt}E\big[\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(\mathcal{S}_t - x)\big]dt = q^{-1}E\big[\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(\mathcal{S}_{T_q} - x)\big] \\ &= q^{-1}\mathbf{P}(\mathcal{S}_{T_q} < x) \equiv q^{-1}\mathbf{P}(X_{T_q} - \mathcal{I}_{T_q} < x). \end{aligned} \tag{2.1}$$

Аналогично, применяя преобразование Лапласа к $F^-(x,T)$, получаем

$$\begin{aligned}\hat{F}^-(x,q) &= \int_0^{+\infty} e^{-qt}E\big[\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(\mathcal{I}_t - x)\big]dt = q^{-1}E\big[\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(\mathcal{I}_{T_q} - x)\big] \\ &= q^{-1}\mathbf{P}(\mathcal{I}_{T_q} < x) \equiv q^{-1}\mathbf{P}(X_{T_q} - \mathcal{S}_{T_q} < x). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Функции $\hat{F}^+(x,q)$ и $\hat{F}^-(x,q)$ можно вычислить, например, с помощью [3, Теорема 2.1], см. также [7].

Теорема 2.1. *Определим $\hat{F}^+(x,q)$ по формуле (2.1). Фиксируем четное натуральное число $N = 2n$, определим точки q_k в соответствии с алгоритмом Гавера–Стехфеста*

$$q_k = \frac{k\ln(2)}{T}, \quad k = 1,\dots,N, \tag{2.3}$$

и весовые коэффициенты ω_k

$$\omega_k := \frac{(-1)^{n+k}}{k\cdot n!}\sum_{j=[(k+1)/2)]}^{\min\{k,n\}} j^{n+1}C_n^j C_{2j}^j C_j^{k-j}, \tag{2.4}$$

где через $[x]$ *обозначена целая часть* x, *а через* $C_L^K = \frac{L!}{(L-K)!K!}$ *— количество сочетаний из* L *элементов по* K. *Тогда*

$$F_{X|\mathcal{I}}(x,y,T) = 0, \quad y > 0, \tag{2.5}$$

$$F_{X|\mathcal{I}}(x,y,T) \approx \frac{\sum_{k=1}^N \omega_k\cdot \hat{F}^+(x-y,q_k)\hat{p}_{q_k}^-(y)}{p_T^-(y)}, \quad y\le 0, \quad x\ge y, \tag{2.6}$$

где $p_t^-(x)$ *и* $\hat{p}_q^-(x)$ *— плотности вероятности* $\mathcal{I}_t$ *и* $\mathcal{I}_{T_q}$, *соответственно.*

Доказательство. Учитывая, что $\mathcal{I}_{T_q}$ принимает неположительные значения, по определению условной функции распределения случайной величины $F_{X|\mathcal{I}}(x,y,T)$ получаем, что при $y>0$ (2.5) выполняется автоматически.

При $y\le 0$, $x\ge y$ имеем

$$\mathbf{P}(X_T<x, \mathcal{I}_T<y) = \int_{-\infty}^{y}\mathbf{P}(X_T<x|\mathcal{I}_T=\tilde{y})p_T^-(\tilde{y})d\tilde{y}, \tag{2.7}$$

где $p_T^-(y)$ — плотность распределения вероятностей случайной величины $\mathcal{I}_T$. Из (2.7), с учетом наших обозначений, получаем,

$$\mathbf{P}(X_T<x|\mathcal{I}_T=y) = \partial_y F_X^-(x,y,T)/p_T^-(y). \tag{2.8}$$

Применяя преобразование Лапласа к $F_X^-(x,y,T)$ и учитывая соотношения в (2.1), получаем

$$\begin{aligned}\hat{F}_X^-(x,y,q) &= \int_0^{+\infty} e^{-qt}E\big[\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(X_t-x)\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(\mathcal{I}_t-y)\big]dt\\ &= q^{-1}E\big[\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(X_{T_q}-x)\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(\mathcal{I}_{T_q}-y)\big]\\ &= q^{-1}E\big[\mathbf{1}_{(-\infty,0)}((X_{T_q}-\mathcal{I}_{T_q})+(\mathcal{I}_{T_q}-x))\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(\mathcal{I}_{T_q}-y)\big]\\ &= E\big[q^{-1}\mathbf{P}(X_{T_q}-\mathcal{I}_{T_q}<x-\mathcal{I}_{T_q})\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(\mathcal{I}_{T_q}-y)\big]\\ &= E\big[\hat{F}^+(x-\mathcal{I}_{T_q},q)\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(\mathcal{I}_{T_q}-y)\big]\\ &= \int_{-\infty}^{0}\hat{F}^+(x-z,q)\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(z-y)p_q^-(z)dz = \int_{-\infty}^{y}\hat{F}^+(x-z,q)p_q^-(z)dz.\end{aligned} \tag{2.9}$$

Дифференцируя интеграл (2.9) по y, мы получаем

$$\partial_y\hat{F}_X^-(x,y,q) = \hat{F}^+(x-y,q)p_q^-(y). \tag{2.10}$$

Обращая преобразование Лапласа в (2.10) с помощью алгоритма Гавера–Стехфеста и подставляя результат в (2.8), завершаем доказательство соотношения (2.6). □

По аналогии можно доказать следующую теорему для условной функции распределения $F_{X|\mathcal{S}}(x,y,T)$.

Теорема 2.2. *Определим* $\hat{F}^-(x,q)$ *по формуле* (2.2). *Фиксируем четное натуральное число* $N=2n$, *определим точки* q_k *в соответствии с алгоритмом Гавера–Стехфеста* (*см.* (2.3), (2.4)) . *Тогда*

$$F_{X|\mathcal{S}}(x,y,T)=0,\quad y<0,$$
$$F_{X|\mathcal{S}}(x,y,T)\approx\frac{\sum_{k=1}^{N}\omega_k\cdot\hat{F}^-(x-y,q_k)\hat{p}^+_{q_k}(y)}{p^+_T(y)},\quad y\geq 0,\quad x\leq y,$$

где $p^+_t(x)$ *и* $\hat{p}^+_q(x)$ — *плотности вероятности* $\mathcal{S}_t$ *и* $\mathcal{S}_{T_q}$, *соответственно.*

Плотности вероятности $p^-_T(x)$ и $p^+_T(x)$ можно вычислить с помощью следующей теоремы.

Теорема 2.3. *Пусть существуют вещественные числа* $\omega_-<0<\omega_+$ *такие, что при любых положительных* q *характеристические функции* $\phi^+_q(\xi)$ (1.2) *и* $\phi^-_q(\xi)$ (1.3) *аналитичны при* $\Im\xi>\omega_-$ *и при* $\Im\xi<\omega_+$, *соответственно. Фиксируем четное натуральное число* $N=2n$, *определим точки* q_k *в соответствии с алгоритмом Гавера–Стехфеста* (*см.* (2.3), (2.4)) . *Тогда*

$$p^-_T(x)=0,\quad x>0,$$
$$p^-_T(x)=\frac{1}{\pi}\Re\int_0^\infty e^{-ix\xi}\Phi^-(\xi,T)d\xi,\quad x\leq 0, \tag{2.11}$$
$$p^+_T(x)=0,\quad x<0, \tag{2.12}$$
$$p^+_T(x)=\frac{1}{\pi}\Re\int_0^\infty e^{-ix\xi}\Phi^+(\xi,T)d\xi,\quad x\geq 0, \tag{2.13}$$

где

$$\Phi^-(\xi,T):=E\left[e^{i\xi\mathcal{I}_T}\right]\approx\sum_{k=1}^{N}\omega_k\cdot q_k^{-1}\cdot\phi^-_{q_k}(\xi). \tag{2.14}$$

$$\Phi^+(\xi,T):=E\left[e^{i\xi\mathcal{S}_T}\right]\approx\sum_{k=1}^{N}\omega_k\cdot q_k^{-1}\cdot\phi^+_{q_k}(\xi).$$

Доказательство. Выразим плотность вероятности $p^-_T(y)$ через характеристическую функцию $\Phi^-(\xi,T)$, применив обратное преобразование Фурье вероятностной меры (см., например, [12, с. 5]):

$$p^-_T(y)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iy\xi}\Phi^-(\xi,T)d\xi.$$

Учитывая, очевидное свойство $\Phi^-(-\xi,T)=\overline{\Phi^-(\xi,T)}$ подынтегральной функции, получаем (2.11).

Выразим $p^-_q(y)$ через функцию $\phi^-_q(\xi)$, применив обратное преобразование Фурье вероятностной меры

$$p^-_q(y)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-iy\xi}\phi^-_q(\xi)d\xi.$$

Из формулы (1.3) следует, что преобразование Лапласа характеристической функции $E\left[e^{i\xi\mathcal{I}_T}\right]$ процесса инфимума $\mathcal{I}_T$ выражается через $\phi^-_q(\xi)$ следующим образом

$$\hat{\Phi}^-(\xi,q)=q^{-1}\phi^-_q(\xi). \tag{2.15}$$

Обращая преобразование Лапласа в (2.15) с помощью алгоритма Гавера–Стехфеста, мы получаем формулу (2.14).

Формулы (2.12), (2.13) доказываются аналогично. □

3. Универсальный метод Монте–Карло для вычисления цен опционов

Суммируя вышесказанное, мы получаем следующий алгоритм симуляции совместного распределения конечного положения процесса Леви и его инфимума:

- В точках q_k, определяемых алгоритмом Гавера–Стехфеста (см. (2.3)–(2.4)), с помощью [3, Теорема 2.1] вычисляем значения функций $\hat{F}^+(x, q_k)$ на плотной равномерной сетке $\{x_j\}$.
- Функцию распределения $F^-(x_j, T)$ вычисляем с помощью [3, Теорема 2.2] на плотной равномерной сетке $\{x_j\}$.
- Симулируем значения $\mathcal{I}_T = y$, решая (с помощью интерполяции или обученной нейросети [11]) уравнение $F^-(y, T) = U$, где U — равномерное распределение на $(0, 1)$.
- Симулируем совместное распределение $X_T = y + z$ и $\mathcal{I}_T = y$, где положительное число z находится путем решения (с помощью интерполяции или обученной нейросети [11, Теорема 3]) уравнения
$$F_{X|\mathcal{I}}(y + z, y, T) = V, \tag{3.1}$$
где V — равномерное распределение на $(0, 1)$, независимое от U. С помощью теоремы теоремы 2.1 решение (3.1) численно сводится к решению
$$\frac{\sum_{k=1}^{N} \omega_k \cdot \hat{F}^+(z, q_k)\hat{p}^-_{q_k}(y)}{p^-_T(y)} = V,$$
где V — равномерное распределение на $(0, 1)$, независимое от U.

Уравнение (3.1) можно также решить численно с помощью метода Ньютона. Положим $F(z) := \sum_{k=1}^{N} \omega_k \cdot \hat{F}^+(z, q_k)\hat{p}^-_{q_k}(y)$. Идея состоит в том, чтобы выбрать начальное приближение z_0 к корню z^* такое, чтобы $F(z_0)$ было достаточно близко к 0. Например, z_0 можно выбрать таким, чтобы $\hat{F}^+(z_0, q_1) = V$. Тогда получим конкретную аппроксимацию решения как корня z_1 уравнения прямой, касательной к кривой $w = F(z)$ в точке $z = z_0$
$$F'(z_0)(z - z_0) = F(z) - F(z_0),$$
где $F(z)$ приближается к 0. Таким образом, новое уточненное предположение z_1 определяется по формуле
$$z_1 = z_0 - \frac{F(z_0)}{F'(z_0)} = \frac{\sum_{k=1}^{N} \omega_k \cdot \hat{F}^+(z_0, q_k)\hat{p}^-_{q_k}(y)}{\sum_{k=1}^{N} \omega_k \cdot \hat{p}^-_{q_k}(z_0)\hat{p}^-_{q_k}(y)}.$$
Мы продолжаем уточнять наш приблизительный корень, пока не достигнем заданной точности. Алгоритм последовательных итераций в методе Ньютона следующий:
$$z_{n+1} = z_n - \frac{F(z_n)}{F'(z_n)} = \frac{\sum_{k=1}^{N} \omega_k \cdot \hat{F}^+(z_n, q_k)\hat{p}^-_{q_k}(y)}{\sum_{k=1}^{N} \omega_k \cdot \hat{p}^-_{q_k}(z_n)\hat{p}^-_{q_k}(y)}.$$
Поскольку порядок сходимости метода Ньютона равен 2, метод сходится достаточно быстро.

Аналогично можно построить алгоритм симуляции совместного распределения конечного положения процесса Леви и его супремума:

- В точках q_k, определяемых алгоритмом Гавера–Стехфеста (см. (2.3)–(2.4)), с помощью [3, Теорема 2.1] вычисляем значения функций $\hat{F}^-(x, q_k)$ на плотной равномерной сетке $\{x_j\}$.
- Функцию распределения $F^+(x_j, T)$ вычисляем на плотной равномерной сетке $\{x_j\}$ с помощью [3, Теорема 2.2].
- Симулируем значения $\mathcal{S}_T = y$, решая (с помощью интерполяции или обученной нейросети [11, Теорема 3]) уравнение $F^+(y, T) = U$, где U — равномерное распределение на $(0, 1)$.
- Симулируем совместное распределение $X_T = y + z$ и $\mathcal{S}_T = y$, где отрицательное число z находится путем решения (с помощью интерполяции или обученной нейросети [11, Теорема 3]) уравнения

$$F_{X|\mathcal{S}}(y + z, y, T) = V, \tag{3.2}$$

  где V — равномерное распределение на $(0, 1)$, независимое от U. С помощью теоремы 2.2 решение (3.2) численно сводится к решению

$$\frac{\sum_{k=1}^N \omega_k \cdot \hat{F}^-(z, q_k) \hat{p}^+_{q_k}(y)}{p^+_T(y)} = V.$$

З а м е ч а н и е 3.1. Для вычисления функций распределения в теоремах 2.1 и 2.2 нам будут нужны функции $\phi^+_q(\xi)$ и $\phi^-_q(\xi)$. Если явные формулы для характеристических функций $\phi^\pm_q(\xi)$ неизвестны, то их можно найти, используя метод приближенной факторизации (см., например [7, 10]).

Опишем, как предложенные алгоритмы могут быть использованы при построении методов Монте–Карло при вычислении цен экзотических опционов. Пусть $r > 0$ — безрисковая процентная ставка, и цена базового актива $S_t = S\exp(X_t)$, где $S > 0$, а X_t — процесс Леви относительно выбранной матрингальной меры. Пусть цена экзотического опциона с моментом исполнения T в момент времени $t = 0$ определяется по формуле

$$V(T, S) = e^{-rT} E\big[G(Se^{\mathcal{S}_T}, Se^{X_T})\big],$$

где $G(M, S)$ — функция выплат по опциону.

Обозначим через

$$\widehat{V}(T, S) := e^{-rT} S \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N G(Se^{\widehat{\mathcal{S}}_n}, Se^{\widehat{\mathcal{S}}_n + \widehat{Z}_n}),$$

где N — количество симуляций, $\widehat{\mathcal{S}}_n$ — решение уравнения $F^+(y, T) = u_n$ относительно y; $\widehat{Z}_n = \mathcal{S}_n$ — решение $F_{X|\mathcal{S}}(u_n + z, u_n, T) = v_n$ относительно z; (u_n, v_n) — симуляция с номером n пары независимых равномерно распределенных на $(0, 1)$ случайных величин U и V. Тогда

$$V(T, S) = \widehat{V}(T, S) + O(N^{-\frac{1}{2}}).$$

Будем называть предложенный подход универсальным методом Монте–Карло для процессов Леви. Универсальность разработанного нами метода Монте–Карло заключается в реализации единообразного подхода для широкого класса процессов Леви, в отличие от классических подходов, когда симуляции существенным образом опираются на особенности вероятностного распределения, связанного с моделируемым случайным процессом или его экстремумами. В нашем подходе достаточно знать характеристическую экспоненту $\psi(\xi)$ (1.1) процесса Леви. Увеличивая количество членов в формуле Гавер–Стехфеста, мы можем добиться необходимой точности вычислений.

С точки зрения практического применения, данный метод легко распараллеливается на базе nVidia CUDA API для одновременного расчета цен различных экзотических опционов на один и тот же базовый актив. В частности, на основе одного набора вероятностей можно одновременно рассчитывать цены нескольких типов опционов для различных значений начальной цены и уровней предопределенного минимума (максимума). В указанном ключе метод может успешно конкурировать с детерминированными методами вычисления опционов. Разработанный в работе универсальный алгоритм состоит из двух ключевых этапов: симуляция положения экстремума процесса Леви на основе аппроксимации его функции распределения $F^+(x,T)$ (или $F^-(x,T)$) и симуляция совместного положения исходного процесса при известном экстремуме на основе аппроксимации условной функции распределения конечного положения процесса Леви относительно его экстремума $F_{X|\mathcal{S}}(x,y,T)$ (или $F_{X|\mathcal{I}}(x,y,T)$).

Основным повторяющимся вычислительным блоком в методе Монте–Карло будет решение уравнений вида $F^+(x,T)=u$ (или $F^-(x,T)=u$) и (3.1) (или (3.2)). В настоящее время нейронные сети и другие методы машинного обучения активно используют не как самостоятельные методы решения задач, а как структурные элементы алгоритма, которые позволяют эффективно выполнять часто повторяющиеся вычислительные блоки. Как показано в [11, Theorem 3], непрерывные случайную величину можно симулировать, не обращая функцию распределения, а аппроксимировав ее с помощью монотонной искусственной нейросети, которую можно интерпретировать как функцию распределения смеси логистических распределений. Таким образом, для реализации метода Монте–Карло нам понадобится симулировать только логистическое распределение как составной элемент нашей конструкции.

References

[1] R. Cont, P. Tankov, *Financial Modelling with Jump Processes*, Financ. Math. Ser., ed. 2nd edition, Chapman & Hall/CRC, BocaRaton, FL, 2008.

[2] K. Sato, *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*, Cambridge Stud. Adv. Math., **68**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1999.

[3] О. Е. Кудрявцев, А. С. Гречко, И. Э. Мамедов, “Метод Монте–Карло для вычисления цен опционов типа lookback в моделях Леви”, *Теория вероятностей и ее применения*, **69**:2 (2024), 305–334; англ. пер.:O. E. Kudryavtsev, A. S. Grechko, I. E. Mamadov, “Monte Carlo method for pricing lookback options in Lévy models”, *Theory Probab. Appl.*, **69**:2 (2024), 243–264.

[4] A. Kuznetsov, A. E. Kyprianou, J. C. Pardo, K. van Schaik, “Wiener–Hopf Monte Carlo simulation technique for Lévy processes”, *Journal of Applied Probability*, **21**:6 (2011), 2171–2190.

[5] A. Ferreiro–Castilla, A. E. Kyprianou, R. Scheichl, G. Suryanarayana, “Multilevel Monte Carlo Simulation for Lévy processes based on the Wiener–Hopf factorisation”, *Stochastic Processes and their Applications*, **124**:2 (2014), 985–1010.

[6] A. Ferreiro-Castilla, K. Van Schaik, “Applying the Wiener–Hopf Monte Carlo simulation technique for Lévy processes to path functionals”, *Journal of Applied Probability*, **52**:1 (2015), 129–148.

[7] О. Е. Кудрявцев, “Приближенная факторизация Винера–Хопфа и методы Монте–Карло для процессов Леви”, *Теория вероятностей и ее применения*, **64**:2 (2019), 228–257; англ.

пер.:O. E. Kudryavtsev, "Approximate Wiener–Hopf factorization and the Monte Carlo methods for Lévy processes", *Theory Probab. Appl.*, **64**:2 (2019), 186–208.

[8] G. Beliaysky, N. Danilova, G. Ougolnitsky, "Calculation of probability of the exit of a stochastic process from a band by Monte Carlo method: a Wiener–Hopf factorization", *Mathematics*, **7**:7 (2019), 581.

[9] G. Fusai, G. Guido, D. Marazzina, "Spitzer identity, Wiener–Hopf factorization and pricing of discretely monitored exotic options", *European Journal of Operational Research*, **251** (2016), 124–134.

[10] O. Kudryavtsev, S. Levendorskiĭ, "Fast and accurate pricing of barrier options under Lévy processes", *Finance Stoch.*, **13**:4 (2009), 531–562.

[11] O. Kudryavtsev, N. Danilova, "Applications of artificial neural networks to simulating Lévy processes", *Journal of Mathematical Sciences*, **271** (2023), 421–433.

[12] G. Doetsch, *Guide to the Applications of the Laplace and Z -transforms*, Van Nostrand-Reinhold, London–New York, 1971.

Информация об авторах

Гречко Александр Сергеевич, научный сотрудник. Научно-производственная фирма «ИнВайз Системс», г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация. E-mail: alex@itparadigma.ru
ORCID: https://orcid.org/0009-0008-3655-4319

Кудрявцев Олег Евгеньевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой информатики и информационных таможенных технологий, Ростовский филиал Российской таможенной академии; заместитель генерального директора по научной работе, Научно-производственная фирма «ИнВайз Системс», г. Ростов-на-Дону, Российская Федерация.
E-mail: koe@donrta.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4331-0204

Конфликт интересов отсутствует.

Для контактов:
Кудрявцев Олег Евгеньевич
E-mail: koe@donrta.ru

Поступила в редакцию 03.06.2024 г.
Поступила после рецензирования 30.08.2024 г.
Принята к публикации 13.09.2024 г.

Information about the authors

Alexander S. Grechko, Researcher. InWise Systems, LLC, Rostov-on-Don, Russian Federation.
E-mail: alex@itparadigma.ru
ORCID: https://orcid.org/0009-0008-3655-4319

Oleg E. Kudryavtsev, Doctor of Physics and Mathematics, Head of Computer Science and Customs Technologies Department, Rostov Branch of the Russian Customs Academy; Deputy General Director for Research, InWise Systems, LLC, Rostov-on-Don, Russian Federation. E-mail: koe@donrta.ru
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-4331-0204

There is no conflict of interests.

Corresponding author:
Oleg E. Kudryavtsev
E-mail: koe@donrta.ru

Received 03.06.2024
Reviewed 30.08.2024
Accepted for press 13.09.2024